Richiami di aritmetica

I numeri naturali

L'insieme dei numeri naturali, che si indica con ***N***, comprende tutti i numeri interi maggiori di zero.

Operazioni fondamentali

OPERAZIONE	SIMBOLO	RISULTATO	TERMINI
addizione **6 + 2**	**più** **+**	**somma** **8**	**addendi** **6 2**
sottrazione **6 - 2**	**meno** **-**	**differenza** **4**	**minuendo e sottraendo** **6 2**
moltiplicazione **6 x 2**	**per** **x**	**prodotto** **12**	**fattori** **6 2**
divisione **6 : 2**	**diviso** **:**	**quoziente** **3**	**dividendo e divisore** **6 2**

La sottrazione è l'operazione inversa della addizione.
La divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione.
Se si somma lo zero ad un numero il risultato è il numero stesso (0 è detto elemento neutro della addizione).
Se si moltiplica l'uno ad un numero il risultato è il numero stesso (1 è detto elemento neutro della moltiplicazione.
Se si moltiplica lo zero ad un numero il risultato è sempre 0 (0 è detto elemento assorbente della moltiplicazione.

Elevamento a potenza

È il prodotto di più fattori tutti uguali.
$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ (2 è la base, 5 è l'esponente);
$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ (5 è la base, 3 è l'esponente)

Proprietà delle potenze:

1ª proprietà: "Il prodotto di due potenze che hanno la stessa base è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti"

$$\boxed{3^5 \cdot 3^2 = 3^{5+2} = 3^7}$$

2ª proprietà: "Il quoziente di due potenze che hanno la stessa base è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti"

$$\boxed{3^5 : 3^2 = 3^{5-2} = 3^3}$$

3ª proprietà: "La potenza di una potenza è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti"

$$\boxed{(3^5)^2 = 3^{5\times 2} = 3^{10}}$$

4ª proprietà: "Il prodotto di due potenze che hanno gli stessi esponenti è una potenza ha per base il prodotto delle basi e per esponente lo stesso esponente"

$$\boxed{6^5 \cdot 3^5 = (6 \cdot 3)^5 = 18^5}$$

5ª proprietà: "Il quoziente di due potenze che hanno gli stessi esponenti è una potenza ha per base il quoziente delle basi e per esponente lo stesso esponente"

$$\boxed{6^5 : 3^5 = (6 : 3)^5 = 2^5}$$

Ricordiamo inoltre che:

1) Tutti i numeri elevati a zero sono uguali a 1

$$\boxed{3^0 = 1 \quad 7^0 = 1 \quad 27^0 = 1 \quad 1583^0 = 1}$$

2) Tutti i numeri elevati a 1 sono uguali a se stessi

$$\boxed{3^1 = 3 \quad 7^1 = 7 \quad 27^1 = 27 \quad 1583^1 = 1583}$$

3) Lo zero elevato a qualsiasi numero (tranne 0^0 = impossibile) è sempre uguale a zero

$$\boxed{0^3 = 0 \quad 0^1 = 0 \quad 0^{17} = 0 \quad 0^{253} = 0}$$

4) L'uno elevato a qualsiasi numero è sempre uguale a uno

$$\boxed{1^3 = 1 \quad 1^6 = 1 \quad 1^{17} = 1 \quad 1^{253} = 1}$$

<u>Espressioni aritmetiche</u>

Nelle espressioni con i numeri naturali valgono le seguenti regole:

1. In una espressione senza parentesi:
   a) prima si svolgono le potenze;
   b) poi si eseguono le moltiplicazioni e le divisioni nell'ordine in cui si trovano;
   c) poi si eseguono le addizioni e le sottrazioni nell'ordine in cui si trovano.
2. In una espressione con le parentesi, $\{[(\ )]\}$, si eseguono prima le operazioni dentro le parentesi più interne (prima quelle interne alle parentesi tonde, poi le interne alle quadre, e infine le interne alle graffe), rispettando in esse le regole del punto precedente.
3. Una volta eseguite tutte le operazioni all'interno di una parentesi questa si deve eliminare.

<u>ESEMPIO</u>: $5 + 2 \times [12 - (3 + 4 \times 2) + 6 : 2] - (4 \times 3 - 15 : 3) + 10 : 5 \times 3 - 7 =$

$= 5 + 2 \times [12 - (3 + 8) + 6 : 2] - (12 - 5) + 10 : 5 \times 3 - 7 =$

$= 5 + 2 \times [12 - 11 + 6 : 2] - 7 + 10 : 5 \times 3 - 7 =$

$= 5 + 2 \times [12 - 11 + 3] - 7 + 10 : 5 \times 3 - 7 =$

$= 5 + 2 \times 4 - 7 + 10 : 5 \times 3 - 7 =$

$= 5 + 8 - 7 + 6 - 7 = 5$

ESERCIZI

1) $16 : 4 + 3 \times 2 - 9 + 12 \times 2 : 8 =$ [R. 4]
2) $8 + (5 + 2 \times 3 - 4) : (6 : 2 + 4) - (11 - 4 \times 2) =$ [R. 6]
3) $[(6 \times 2 + 5) - 3^2 : (7 - 16 : 4) + 4] : [11 - (9 - 14 : 2)^3 + 3] + 7 =$ [R. 10]
4) $\{45 + 6^2 \times (15 - 3^2) \times [9 - 2 \times (18 - 2^4)^2] - 12^2\} : [(3^2 \times 2^2) + 3] =$ [R. 3]

Massimo comune divisore (*M.C.D.*) - Minimo comune multiplo (*m.c.m.*)

Per calcolare, tra più numeri, il massimo comune divisore (il più grande dei numeri interi che può dividere tutti i numeri presi in esame senza che vi sia resto) e il minimo comune multiplo (il più piccolo dei multipli comune dei numeri presi in esame) conviene scomporre in fattori primi i numeri dati (ricordiamo che i numeri primi sono divisibili solo per se stessi e per 1):

ESEMPI: $12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$ $\quad 16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$ $\quad 8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$ $\quad 15 = 3 \times 5$ $\quad 10 = 2 \times 5$

"Il M.C.D., tra due o più numeri, è il più grande dei divisori comuni ai numeri considerati":

(12 – 16 – 8 – 24) $\rightarrow$ $M.C.D. = 2^2 = 4$; (12 – 15 – 10) $\rightarrow$ $M.C.D. = 1$

"Il *m.c.m.*, tra due o più numeri, è il più piccolo dei multipli comuni ai numeri considerati":

(12 – 16 – 8 – 24) $\rightarrow$ $m.c.m. = 2^4 \times 3 = 48$; (12 – 15 – 10) $\rightarrow$ $m.c.m. = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$

ESERCIZI:

1) Calcola il M.C.D. e il m.c.m tra: 20; 24; 18
2) Calcola il M.C.D. e il m.c.m tra: 15; 12; 20

Le frazioni

La frazione è un operatore che divide l'intero in parti uguali e ne prende in considerazione alcune.

$$\frac{5}{8} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \textit{numeratore} \\ \leftarrow \textbf{\textit{linea di frazione}} \\ \leftarrow \textit{denominatore} \end{array}$$

(si legge cinque ottavi)

IL denominatore rappresenta le parti uguali in cui è stato diviso l'intero, il numeratore le parti considerate e la linea di frazione l'operazione di divisione (il valore del numero si ottiene dividendo il numeratore per il denominatore 5:8=0,625).

Una frazione non può mai avere lo zero al denominatore perché non si può dividere un numero per zero. Tutte le frazioni che hanno zero al numeratore sono uguali a zero.

FRAZIONI EQUIVALENTI: (hanno lo stesso valore)

Le frazioni equivalenti si possono ridurre dividendo numeratore e denominatore per lo stesso numero; se le si divide per il loro M.C.D. la frazione si dice ridotta ai minimi termini ed è la frazione generatrice di tutte le frazioni ad essa equivalenti.

$\frac{24}{18} = \frac{24:6}{18:6} = \frac{4}{3}$ ma anche $\frac{20}{15} = \frac{20:5}{15:5} = \frac{4}{3}$ per cui $\frac{24}{18}$ e $\frac{20}{15}$ sono frazioni equivalenti tra loro ed equivalenti a $\frac{4}{3}$ che è la frazione generatrice. Frazioni equivalenti tra loro appartengono alla stessa **classe di equivalenza**.

NUMERI RAZIONALI

L'insieme di tutte le classi di frazioni equivalenti forma l'insieme dei numeri **razionali** che si indica con la lettera **Q**. L'insieme dei numeri naturali **N** è un sottoinsieme dell'insieme dei numeri razionali (**N** $\subset$ **Q**).

OPERAZIONI CON LE FRAZIONI

Addizione e sottrazione:

$\frac{5}{4}+\frac{2}{3}-\frac{7}{6}=$ *si calcola il minimo comune multiplo dei denominatori e lo si scrive al denominatore; si divide, quindi tale denominatore per ogni denominatore moltiplicando il risultato per il relativo numeratore; i numeri così ottenuti si sommano per ottenere il numeratore della frazione risultante*

$$=\frac{12:4\cdot 5+12:3\cdot 2-12:6\cdot 7}{12}=\frac{15+8-14}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$$

Moltiplicazione:

$\frac{6}{5}\times\frac{10}{9}=$ *si moltiplicano tutti i numeratori tra loro e tutti i denominatori tra loro dopo aver eseguito eventuali semplificazioni tra numeratori e denominatori* $=\frac{6:3}{5:5}\times\frac{10:5}{9:3}=2\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$

Divisione:

$\frac{6}{5}:\frac{10}{9}=$ *si moltiplica la prima frazione per il reciproco (frazione capovolta) della seconda frazione* $=\frac{6}{5}\times\frac{9}{10}=\frac{3}{5}\times\frac{9}{5}=\frac{27}{25}$

Elevamento a potenza:

$\left(\frac{6}{5}\right)^2=$ *si elevano a potenza sia il numeratore che il denominatore della frazione* $=\frac{6^2}{5^2}=\frac{36}{25}$

ESPRESSIONI CON LE FRAZIONI

Valgono tutte le regole precedentemente studiate nelle espressioni con i numeri naturali.
Ricordiamo che un numero intero si può considerare come una frazione avente 1 al denominatore.

ESERCIZI:

1) $\frac{5}{4}+\frac{7}{6}-2=$

2) $\frac{5}{4}\times\frac{6}{7}\times\frac{14}{9}=$

3) $\frac{10}{9}:\frac{7}{6}:\frac{5}{12}=$

4) $\left(\frac{3}{5}\right)^3:\frac{3}{5}=$

5) $\frac{11}{4}-\frac{18}{10}\times\frac{5}{6}=$

6) $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{3}{4}:\left(1+\frac{1}{2}\right):\frac{5}{18}=$

7) $2-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}+\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{10}{3}:6-\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{9}{2}-\frac{7}{12}=$

8) $\left\{\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{9}:\frac{2}{3}\right):\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}:\left(\frac{3}{2}\right)^2+1\right]\right\}:\left[4+\left(\frac{2}{3}\right)^3:\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{7}\right)\right]=$

Risultati: $\frac{5}{12}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{16}{7}$; $\frac{9}{25}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{3}{10}$; 1 ; $\frac{3}{32}$

Numeri decimali

I numeri decimali (numeri con la virgola) si dividono in:
a) numeri decimali limitati;
b) numeri decimali illimitati periodici ($5,\overline{37}$ *periodico semplice*; $5,3\overline{7}$ *periodico misto*);
c) numeri decimali illimitati non periodici (radici, logaritmi, ….., π, *e*).

I primi due gruppi fanno parte dei numeri razionali in quanto ottenuti da frazioni (sono il quoziente tra numeratore e denominatore), e pertanto possono essere trasformati in frazioni.
Le regole per la trasformazione sono:

a) Il numeratore è uguale al numero senza virgola; il denominatore è un multiplo di 10 con tanti zeri quante sono le cifre dopo la virgola

$$2,9=\frac{29}{10} \quad ; \quad 3,17=\frac{317}{100} \quad ; \quad 0,053=\frac{53}{1000}$$

b) Il numeratore è uguale alla differenza tra il numero senza la virgola meno la parte numerica fuori dal periodo; il denominatore è formato da tanti 9 quante sono le cifre del periodo e da tanti 0 quante sono le cifre dell'antiperiodo

$$5,\overline{37}=\frac{537-5}{99}=\frac{532}{99} \text{ (37 è il periodo)} \quad ; \quad 5,3\overline{7}=\frac{537-53}{90}=\frac{484}{90} \text{ (7 è il periodo; 3 è l'antiperiodo)}$$

ESERCIZI

1) Trasforma in frazione i seguenti numeri decimali limitati: 7,83 – 17,8 – 0,05 – 34,037 – 0,0001
2) Trasforma in frazione i seguenti numeri decimali periodici: $4,\overline{7}$ - $12,5\overline{3}$ - $0,0\overline{28}$

Rapporti

Il rapporto tra due numeri (il secondo dei quali è diverso da 0) è il risultato della loro divisione; di solito è scritto in forma frazionaria.
Il rapporto tra due grandezze (grandezza è tutto ciò che può essere misurato: lunghezza, peso, temperatura, ecc.) omogenee (dello stesso tipo) è un numero: $\frac{50\,Kg}{25\,Kg}=2$.
Il rapporto tra due grandezze non omogenee è una terza grandezza non omogenea a quelle date: $\frac{50\,Km}{2\,h}=25\,Km/h\ \left(\frac{spazio}{tempo}=velocità\right)$.
Il rapporto tra i numeri 12 e 8 è $\frac{12}{8}=12:8=1,5$; il rapporto tra i numeri 8 e 12 è $\frac{8}{12}=8:12=0,\overline{6}$

Proporzioni

La proporzione è l'uguaglianza di due rapporti.
Dati i rapporti $\frac{36}{18}=36:12=2$ e $\frac{24}{12}=24:12=2$ si avrà la proporzione:

$\boxed{36:18=24:12}$ *si legge 36 sta a 18 come 24 sta a 12*

I numeri **36**, **18**, **24**, e **12** sono detti **termini** della proporzione, ed in particolare:
- **36** e **12** sono detti **estremi** della proporzione; 18 e 24 sono detti **medi** della proporzione

- **36** e **24** sono detti **antecedenti**; 18 e 12 sono detti **conseguenti**

Una proporzione i cui medi sono uguali si dice **continua** e i due medi uguali sono detti medi proporzionali.

<u>PROPRIETÀ DELLE PROPORZIONI</u>:

Data la proporzione $\boxed{36:18=24:12}$ in essa, come in tutte le altre proporzioni, sono valide le seguenti proprietà:

1) <u>Proprietà fondamentale</u>: "Il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi"
$$36\times 12=18\times 24$$
2) <u>Proprietà del permutare</u>: "Scambiando di posto, in una proporzione, i medi o gli estremi (o entrambi) si ha ancora una proporzione"
$$12:18=24:36 \quad \textit{oppure} \quad 36:24=18:12 \quad \textit{oppure} \quad 12:24=18:36$$
3) <u>Proprietà dell'invertire</u>: "Scambiando, in una proporzione, ogni antecedente col proprio conseguente si ha ancora una proporzione"
$$18:36=12:24$$
4) <u>Proprietà del comporre</u>: "In una proporzione la somma dei primi due termini sta al primo (o al secondo) termine, come la somma degli altri due termini sta al terzo (o al quarto) termine"
$$(36+18):36=(24+12):24 \quad \textit{oppure} \quad (36+18):18=(24+12):12$$

5) <u>Proprietà dello scomporre</u>: "In una proporzione la differenza dei primi due termini sta al primo (o al secondo) termine, come la differenza degli altri due termini sta al terzo (o al quarto) termine"
$$(36-18):36=(24-12):24 \quad \textit{oppure} \quad (36-18):18=(24-12):12$$

<u>CALCOLO DEL TERMINE INCOGNITO</u>:

Se in una proporzione uno dei termini non è conosciuto è detto termine incognito, lo si indica con la lettera *x*, e lo si calcola nel modo seguente:

a) se è un estremo esso sarà uguale al prodotto dei medi diviso l'altro estremo:
$$36:18=24:x \quad \rightarrow \quad x=\frac{18\cdot 24}{36}=12$$
b) se è un medio esso è uguale al prodotto degli estremi diviso l'altro medio:
$$36:x=24:12 \quad \rightarrow \quad x=\frac{36\cdot 12}{24}=18$$

Se in una proporzione continua non si conosce il medio proporzionale, lo si calcola moltiplicando i due estremi ed estraendo la radice quadrata del prodotto:
$$36:x=x:9 \quad \rightarrow \quad x^2=36\cdot 9=324 \quad \rightarrow \quad x=\sqrt{324}=18$$

<u>ESERCIZI</u>

Risolvi le seguenti proporzioni:

1) $5:20=x:16$ 2) $x:\frac{3}{4}=\frac{3}{5}:\frac{1}{4}$ 3) $9:x=x:4$ 4) $\frac{6}{5}:x=x:\frac{15}{8}$

Risultati: 4 ; $\frac{9}{5}$; 6 ; $\frac{3}{2}$

<u>PERCENTUALE</u>:

Si possono utilizzare le proporzioni per il calcolo percentuale. Uno dei rapporti della proporzione è il rapporto percentuale il cui secondo termine è sempre 100.

<u>ESEMPI</u>: 1) *Calcola il 15% di 250000*

$$15:100 = x:250000 \quad \rightarrow \quad x = \frac{15 \cdot 250000}{100} = 37500$$

2) *Calcola la percentuale di sconto se hai pagato 60$ in meno su un prezzo di 200$*

$$x:100 = 60:200 \quad \rightarrow \quad x = \frac{100 \cdot 60}{200} = 30\%$$

<u>ESERCIZIO</u>

Ad un esame erano iscritti 200 candidati; se ne presentarono 186 e 124 superarono la prova. Calcola la percentuale dei presenti; calcola la percentuale dei bocciati rispetto ai presenti.